Durée : 2 h. Calculatrice interdite. Un barème indicatif est indiqué pour chaque problème. On veillera à encadrer les résultats et à justifier toute affirmation.

I - Problème 1 : Onde cylindrique d'une antenne

(∼ 40% des pts)

On donne l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathrm{A}_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{A}_\theta) - \frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

Un fil source d'axe (Oz) émet dans le vide une onde dont le champ électrique est donné en coordonnées cylindriques par $\underline{\overrightarrow{E}} = E(r)e^{i(\omega t - kr)}\overrightarrow{u_z}$.

Q1. Démontrer rigoureusement que le champ magnétique complexe $\underline{\overrightarrow{B}}$ correspondant s'écrit :

$$\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{1}{i\omega}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} - ikE\right)e^{i(\omega t - kr)}\overrightarrow{u_\theta}$$

Q2. Rappeler la définition du vecteur de Poynting instantané $\overrightarrow{\Pi}$.

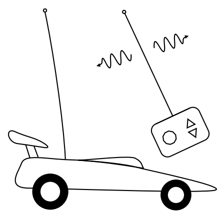
Q3. En tout point de l'espace hors de l'axe (Oz), déterminer le vecteur de Poynting instantané $\overrightarrow{\Pi}$, puis sa moyenne temporelle $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle$.

Q4. Déterminer la puissance moyenne rayonnée à travers un cylindre d'axe (Oz) de rayon r et de hauteur h.

Q5. Dans le vide, peut-il y avoir dissipation d'énergie ? En déduire la dépendance en r de $E(r)$ à une constante α près, dont on précisera l'unité.

Q6. Déterminer l'expression de $\underline{\overrightarrow{B}}$ à grande distance (pour $r \gg \lambda$) et commenter : s'agit-il d'une onde plane ? D'une onde progressive ? D'une onde monochromatique ?

Une voiture télécommandée usuelle communique avec une porteuse à 30 MHz et la voiture est capable de détecter le signal reçu jusqu'à 10 m.

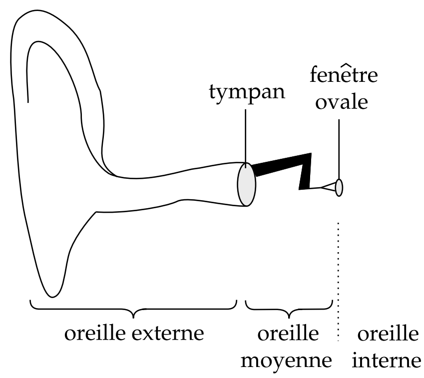


Q7. Rappeler sans démonstration la relation de dispersion d'une onde électromagnétique dans le vide. L'approximation précédente $r \ll \lambda$ est-elle valable en pratique ?

II - Problème 2 : Oreille humaine et rôle de l'oreille moyenne

(∼ 60% des pts)

Un schéma simplifié de l'oreille se trouve ci-contre : Le pavillon de l'oreille externe mène à une membrane vibrant dans l'air, le tympan. Un système d'étrier et d'enclume transmet alors la vibration du tympan en une vibration de la fenêtre ovale, une plus petite membrane, vibrant dans l'eau et faisant alors vibrer les cils de l'oreille interne, transformant le signal acoustique en signal nerveux.



Les grandeurs physiques sinusoïdalement oscillantes seront représentées par une grandeur complexe notée par exemple $\underline{x}(t) = X_0 e^{i\omega t}$.

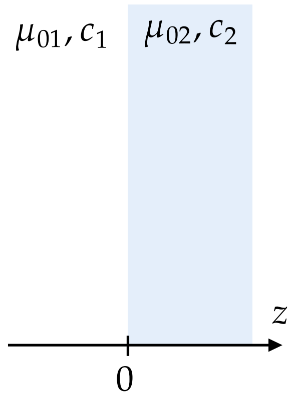
On considère l'air comme un fluide parfait initialement au repos, dont les champs de vitesse pression et masse volumique s'écrivent :

$$\overrightarrow{v}(\overrightarrow{r},t) \qquad P(\overrightarrow{r},t) = P_0 + p(\overrightarrow{r},t) \qquad \mu(\overrightarrow{r},t) = \mu_0 + \mu_1(\overrightarrow{r},t)$$

Q8. Dans l'approximation acoustique, quelles sont les trois hypothèses supplémentaires émergeant (une pour la masse volumique, une pour la pression, et une pour la vitesse ou le déplacement) ?

a. Modèle sans oreille moyenne

On suppose dans un premier temps qu'il n'y aie pas d'oreille moyenne : on considère une onde plane monochromatique de pulsation ω arrivant en incidence normale sur une interface infinie entre deux milieux fluides, définis par leurs célérités c_1 et c_2, et leurs masses volumiques μ_{01} et μ_{02}.



On note p_i, p_r et p_t les surpressions des ondes incidente, réfléchies et transmises à l'interface, ainsi que v_i, v_r et v_t les projections selon $\overrightarrow{u}_z$ des vitesses particulaires associées.

Q9. Définir les impédances acoustiques de chacun de ces milieux.

On donne : $c_{eau} = 1500$ m.s^{-1} la célérité d'une onde sonore dans l'eau.

Q10. Pour une interface air/eau, faire l'application numérique de Z_1 et de Z_2.

Q11. En appliquant les relations de continuité à l'interface, déterminer rigoureusement les expressions des coefficients de réflexion $r = \frac{\underline{p_r}}{\underline{p_i}}$ et transmission $t = \frac{\underline{p_t}}{\underline{p_i}}$ en pression en fonction de Z_1 et Z_2.

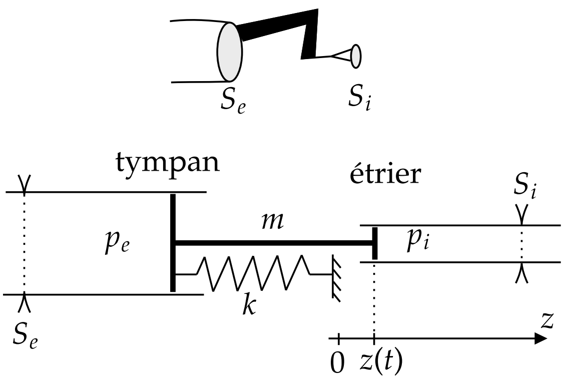
Q12. Définir les coefficients de réflexion R et de transmission T des puissances acoustiques en fonction de p_i, p_r, p_t, v_i, v_r et v_t

Q13. En déduire que $R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$ et $T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2}$.

Q14. Calculer les valeurs numériques de R et T.

b. Modèle avec oreille moyenne

On modélise l'action de l'oreille moyenne comme une liaison rigide (schématisée en gras) de masse m liant le tympan (de section S_e) et l'étrier (de section S_i), vus comme deux pistons, le premier dans l'air et le second dans l'eau. On note $z(t)$ l'abscisse du second piston à l'instant t, et le ressort est tel que pour $z = 0$ la force qu'il exerce sur le système est nulle.



Q15. Appliquer le principe fondamental de la dynamique pour établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.

Q16. Par définition de l'impédance acoustique Z_{eau} de l'eau, relier p_i, Z_{eau} et $\dot{z}$.

Q17. En déduire l'expression du gain en pression $\underline{G}(\omega) = \frac{\underline{p_i}}{\underline{p_e}}$ lorsque le système est excité en régime sinusoïdal.

Q18. En pratique, $S_e = 70$ mm^2 et $S_1 = 3,3$ mm^2. Déterminer la valeur maximale du module du gain $|\underline{G}|(\omega)$.

Q19. En utilisant ce gain et le facteur de transmission trouvé précédemment en question 13, déterminer la valeur maximale du facteur de transmission T' de la puissance acoustique à travers l'oreille moyenne, dont on fera l'application numérique.

Éléments de correction : DS n°5

Q 1. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

$$\vec{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \quad \text{avec}$$

$$\vec{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(E(r)\,e^{i(\omega t - kr)}\right)\vec{u_\theta}$$

$$= -\left(\frac{dE}{dr} - ikE\right)e^{i(\omega t - kr)}\vec{u_\theta} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$$

donc $$\underline{\vec{B}} = \underbrace{\underline{\vec{C^{te}}}}_{} + \frac{1}{i\omega}\left(\frac{dE}{dr} - ikE\right)e^{i(\omega t - kr)}\vec{u_\theta}$$

indep. de t, donc ne fait pas partie de l'onde, donc $\vec{C^{te}} = \vec{0}$ quitte à superposer ce $\vec{B}$ comme une contribution statique.

Q 2. $$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$$

Q 3. On n'oublie pas de repasser en réels avant de calculer $\vec{\Pi}$:

$$\vec{E} = E(r)\cos(\omega t - kr)\,\vec{u_z} \quad \text{et}$$

$$\vec{B} = \left[-\frac{k}{\omega}E(r)\cos(\omega t - kr) + \frac{1}{\omega}\frac{dE}{dr}\sin(\omega t - kr)\right]\vec{u_\theta}$$

d'où $$\vec{\Pi} = \frac{E^2(r)\,k}{\omega\mu_0}\cos^2(\omega t - kr)\,\vec{u_r} - \frac{E}{\mu_0\omega}\frac{dE}{dr}\cos(\omega t - kr)\sin(\omega t - kr)\,\vec{u_r}$$

et $$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{\Pi}\,dt \quad \text{où} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

or $$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\omega t}{2}\right)dt \quad \text{car } \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$= \frac{1}{2} + \underbrace{\left[\frac{\sin 2\omega t}{4T}\right]_0^T}_{0-0=0} = \frac{1}{2}$$

et $\frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{\sin(\omega t+\varphi)}_{u}\underbrace{\cos(\omega t+\varphi)}_{\frac{u'}{\omega}}dt = \frac{1}{T}\left[\frac{\sin^2(\omega t+\varphi)}{\omega}\right]_0^T = 0-0=0$

d'où $\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{E^2(r)k}{2\omega\mu_0}\vec{u_r}$ et $k=+\frac{\omega}{c}$ dans le vide.

(+ d'après l'énoncé, $k>0, \omega>0$).

Q4. $P_{moy} = \iint\langle\vec{\Pi}\rangle\cdot\vec{dS} = \int_0^h dz\int_0^{2\pi} r\,d\theta\,\langle\vec{\Pi}\rangle\cdot\vec{u_r}$

$P_{moy} = \frac{h\pi r E^2(r)}{c\mu_0}$

Q5. Il ne peut pas y avoir dissipation d'énergie dans le vide, donc P_{moy} doit être indépendant de r, d'où $rE^2(r) = C^{te}$ et donc

$E(r) = \frac{\sqrt{C^{te}}}{\sqrt{r}}$, notons $E(r) = \frac{\alpha}{\sqrt{r}}$ avec

α en $V.m^{-\frac{1}{2}}$

Q6. Pour $r \gg \lambda$ on a $k=\frac{2\pi}{\lambda} \ll \frac{2\pi}{r}$, or

$\underline{\vec{B}} = \frac{1}{i\omega}\left(\alpha r^{-3/2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) - ik\frac{\alpha}{\sqrt{r}}\right)e^{i(\omega t-kr)}\vec{u_\theta}$

$= \frac{\alpha}{i\omega\sqrt{r}}\left(-\frac{1}{2r} - ik\right)e^{i(\omega t-kr)}\vec{u_\theta}$

notons $z = \frac{1}{2r}+ik$, $|z| = \sqrt{\frac{1}{4r^2}+k^2} \simeq k$

et $z=|z|e^{i\theta}$ avec $\tan\theta = 2kr \to +\infty$ donc $\theta \to \frac{\pi}{2}\,[\pi]$

d'où $z \simeq +ik$ donc $\underline{\vec{B}} = -\frac{\alpha k}{\omega\sqrt{r}}e^{i(\omega t-kr)}\vec{u_\theta}$

on a $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{u_r}\wedge\underline{\vec{E}}}{c}$, c'est un trièdre direct localement, on retrouve la structure d'onde plane dans le vide.

Q7. On a $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ donc $c = \lambda f$ dans le vide (avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et $\omega = 2\pi f$) d'où $\lambda = \frac{3\times10^8}{3\times10^7} = 10\,m$

On a ici $r \simeq \lambda$, l'approximation n'est donc pas valable.

Problème 2 :

Q8. On a $\mu_1 \ll \mu_0$, $p \ll P_0$, et (au choix) $\|\vec{v}\| \ll c_{son}$, ou $\underset{\text{déplacement } (v = \dot{\xi})}{\xi} \ll \lambda$ ← longueur d'onde ou dist. carac. de variation de $\vec{v}$

Q9. On a ici c_1 et c_2 mais pas d'informations concrètes sur $\frac{dP}{d\mu} = c^2$, donc on écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p \\ P_1 = c^2 \mu_1 \end{cases}$$

Q10. L'impédance acoustique vaut par définition $Z_1 = \frac{p}{\vec{v}\cdot\vec{n}}$ dans le milieu 1, idem dans le milieu 2. En RSF on peut par ex. utiliser l'éq. de conservation de la masse linéarisée : $i\omega \frac{P_1}{c^2} - \mu_0 i k v_z = 0$ pour v et p deux OPPM se propageant selon $+\vec{e_z}$: $\frac{P_1}{v_z} = \mu_0 c$

donc $Z_1 = \rho_{01} c_1$ et $Z_2 = \rho_{02} c_2$

Q 11. Dans l'air $\rho_{01} = 1(,2)\ kg.m^{-3}$ $Z_1 = 340\ kg.m^{-2}s^{-1}$

$c_1 = 340\ m.s^{-1}$

Dans l'eau $\rho_{02} = 10^3\ kg.m^{-3}$ $Z_2 = 1,5\times10^6\ kg.m^{-2}s^{-1}$

$c_2 = 1,5\times10^3\ m.s^{-1}$

Q 12. voir cours.

PFD à l'interface $\Rightarrow$ $p_i + p_r = p_t$

non-miscible $\Rightarrow$ $v_i + v_r = v_t$

donc $\begin{cases} 1 + r = t \\ \dfrac{p_i}{Z_1} - \dfrac{p_r}{Z_1} = \dfrac{p_t}{Z_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + r = t \\ 1 - r = \dfrac{Z_1}{Z_2} t \end{cases}$

d'où $2 = \left(1 + \dfrac{Z_1}{Z_2}\right) t$ soit $\boxed{t = \dfrac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2}}$

et $\boxed{r = t - 1 = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}}$

Q 13. $R = \dfrac{\langle \vec{\Pi}_r \rangle . (-S\vec{u_2})}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle . (+S\vec{u_2})}$ $T = \dfrac{\langle \vec{\Pi}_t \rangle . (S\vec{u_2})}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle . (S\vec{u_2})}$

avec $\vec{\Pi}_r = p_r \vec{v_r}$ $\vec{\Pi}_t = p_t \vec{v_t}$ $\vec{\Pi}_i = p_i \vec{v_i}$

Q 14. On a $\vec{\Pi}_r = -\dfrac{p_r^2}{Z_1} \vec{u_2}$ $\vec{\Pi}_i = \dfrac{p_i^2}{Z_1} \vec{u_2}$

et $\vec{\Pi}_t = \dfrac{p_t^2}{Z_2} \vec{u_2}$ donc

$R = r^2 = \left(\dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2$ et $T = \dfrac{t^2 Z_1}{Z_2} = \dfrac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$

Q 15. $Z_1 + Z_2 \simeq Z_2$ donc $T \simeq \dfrac{4 Z_1}{Z_2} = 4 \times 2 \times 10^{-4} = 8 \times 10^{-4}$

et $R = 1 - T \simeq 1$ $(0{,}9992)$, quasi toute l'onde est réfléchie à l'interface.

Q16. On a $m\ddot{z} = p_e S_e - p_i S_i - kz$

Q17. on a continuité de la vitesse du fluide sur l'étrier, donc $Z_{eau} = \dfrac{p_i}{\dot{z}}$

Q18. En RSF on a :

$$i\omega m \frac{p_i}{Z_{eau}} + p_i S_i + k \frac{p_i}{Z_{eau}\, i\omega} = p_e S_e$$

donc
$$\underline{G} = \frac{S_e}{S_i + \frac{1}{Z_e}\left(\frac{k}{i\omega} + mi\omega\right)} = \frac{H_0}{1 + iQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$H_0 = \frac{S_e}{S_i}$$

Q19. pour $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ on a

$$|\underline{G}| = \frac{S_e}{S_i} = 20$$

Q20. $T' = \dfrac{\frac{1}{Z_e} p_i^2}{\frac{1}{Z_a} p_e^2} = G^2 \times \dfrac{Z_a}{Z_e}$, soit au maximum $20^2 \times 2 \times 10^{-4} = 8 \times 10^{-2} = 0{,}08$, c'est 400 x mieux que sans l'oreille moyenne, c'est déjà ça de pris.